

*Πρόλογος 17*

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

**Εισαγωγή στα σύνολα 19**

1.1.	Ορισμοί – Βασικές έννοιες .....	21
1.2.	Καρτεσιανό γινόμενο .....	23
1.3.	Σχέσεις συνόλων .....	26
1.4.	Συναρτήσεις .....	29
	<i>Ασκήσεις</i> .....	36

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

**Πραγματικοί αριθμοί 39**

2.1.	Αξιοματική θεμελίωση .....	41
2.2.	Η ευθεία των πραγματικών αριθμών: Διαστήματα του $\mathbb{R}$ .....	49
2.3.	Το επεκτεταμένο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ (ή συμπλής ευθεία του $\mathbb{R}$ ) .....	51
	<i>Ασκήσεις</i> .....	53

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

**Ο χώρος  $\mathbb{R}^2$  55**

3.1.	Ορισμοί – Βασικές έννοιες .....	57
3.2.	Απόσταση σημείων .....	60
3.3.	Διανύσματα .....	64
	3.3.1. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων .....	70
3.4.	Η ευθεία του $\mathbb{R}^2$ .....	74
	3.4.1. Εξίσωση ευθείας .....	80
3.5.	Αλλαγή συστήματος (καρτεσιανών) συντεταγμένων .....	84
	3.5.1. Μεταφορά των αξόνων .....	84
	3.5.2. Στροφή των αξόνων .....	85
	3.5.3. Μεταφορά και στροφή των αξόνων .....	87
3.6.	Πολικές συντεταγμένες .....	88
	<i>Ασκήσεις</i> .....	89

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Ακολουθίες πραγματικών αριθμών 93

4.1. Ορισμοί – Βασικές έννοιες . . . . .	95
4.2. Σύγκλιση ακολουθιών . . . . .	100
4.2.1. Κατ' εκδοχήν σύγκλιση . . . . .	111
4.3. Υπακολουθίες . . . . .	114
Ασκήσεις . . . . .	117

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Σειρές πραγματικών αριθμών 121

5.1. Ορισμοί – Βασικές έννοιες . . . . .	123
5.2. Κριτήρια σύγκλισης και απόκλισης σειρών . . . . .	125
5.2.1. Γεωμετρική σειρά . . . . .	125
5.2.2. Κριτήριο n-οστού όρου για απόκλιση . . . . .	129
5.2.3. Πράξεις συγκλινουσών σειρών . . . . .	130
5.2.4. Σειρές με μη αρνητικούς όρους . . . . .	132
5.2.5. Εναλλασσόμενες σειρές . . . . .	142
5.2.6. Αρμονικές σειρές . . . . .	144
5.3. Απόλυτη σύγκλιση . . . . .	146
Ασκήσεις . . . . .	149

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Πραγματικές συναρτήσεις 163

6.1. Ορισμοί – Βασικές έννοιες . . . . .	155
6.2. Διάταξη και πράξεις συναρτήσεων . . . . .	160
6.3. Ιδιότητες συναρτήσεων . . . . .	163
6.3.1. Άρτιες - Περιττές συναρτήσεις . . . . .	164
6.3.2. Περιοδικές συναρτήσεις . . . . .	164
6.3.3. Αμφιμονοσήμαντες (1-1) και επί συναρτήσεις. Αντίστροφες συναρτήσεις . . . . .	165
6.4. Είδη συναρτήσεων . . . . .	166
6.4.1. Πολυωνυμικές συναρτήσεις . . . . .	166
6.4.2. Ρητές συναρτήσεις . . . . .	167
6.4.3. Απόλυτη τιμή συνάρτησης . . . . .	168
6.4.4. Αλγεβρικές συναρτήσεις . . . . .	168
6.5. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . . .	168
6.5.1. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . . .	173

6.6.	Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις . . . . .	176
6.6.1.	Δυνάμεις . . . . .	176
6.6.2.	Εκθετικές συναρτήσεις . . . . .	178
6.6.3.	Λογαριθμικές συναρτήσεις . . . . .	183
	Ασκήσεις . . . . .	186

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### Σύγκλιση συναρτήσεων 189

7.1.	Ορισμοί – Βασικές έννοιες . . . . .	191
7.2.	Όρια συναρτήσεων . . . . .	192
7.3.	Πλευρικά όρια. Σύγκλιση στο $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	203
	Ασκήσεις . . . . .	218

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### Συνέχεια συναρτήσεων 221

8.1.	Ορισμοί – Βασικές έννοιες . . . . .	223
8.2.	Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων . . . . .	236
8.3.	Ομοιόμορφη (ή ομαλή) συνέχεια . . . . .	240
	Ασκήσεις . . . . .	248

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

### Η παράγωγος 251

9.1.	Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης . . . . .	253
9.2.	Η κλίση της καμπύλης $y = f(x)$ . . . . .	260
9.3.	Παράγωγος συναρτήσεων . . . . .	266
9.3.1.	Εφαπτομένη καμπύλης . . . . .	272
9.3.2.	Πλευρικές παράγωγοι . . . . .	276
9.3.3.	Παράγωγοι ανώτερης τάξης . . . . .	280
9.4.	Κανόνες παραγωγίσισης . . . . .	282
9.4.1.	Παράγωγος πολυωνυμικών συναρτήσεων . . . . .	282
9.4.2.	Παράγωγοι γινομένου, πηλίκου και δυνάμεων συναρτήσεων . . . . .	287
9.4.3.	Παράγωγοι σύνθεσης συναρτήσεων και αντίστροφης συνάρτησης . . . . .	294
9.4.4.	Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	302
9.4.5.	Παράγωγοι εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων . . . . .	309

9.5.	Έννοια διαφόρισης. Διαφορικό συνάρτησης . . . . .	319
9.6.	Εφαρμογές. Πεπλεγμένες συναρτήσεις . . . . .	325
9.6.1.	Εφαπτόμενες και κάθετες γραμμές. . . . .	328
	<i>Ασκήσεις</i> . . . . .	332

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

### Εφαρμογές των παραγώγων 337

10.1.	Βασικά θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού . . . . .	339
10.1.1.	Τοπικά ακρότατα. Αρχή του Fermat . . . . .	339
10.1.2.	Θεώρημα Rolle. . . . .	344
10.1.3.	Θεώρημα Μέσης Τιμής . . . . .	347
10.1.4.	Απροσδιόριστες μορφές. Κανόνας L'Hospital . . . . .	352
10.2.	Μελέτη συναρτήσεων. Χαρακτηριστικές ιδιότητες . . . . .	363
10.2.1.	Μονοτονία συναρτήσεων . . . . .	364
10.2.2.	Προσδιορισμός τοπικών ακροτάτων . . . . .	369
10.2.3.	Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Σημεία καμψής . . . . .	376
10.2.4.	Ασύμπτωτες και συμμετρία . . . . .	387
10.2.4.1.	Ασύμπτωτες . . . . .	387
10.2.4.2.	Συμμετρία. . . . .	393
10.2.5.	Σχεδίαση του γραφήματος μιας συνάρτησης . . . . .	395
10.3.	Τύπος Taylor . . . . .	404
10.3.1.	Διαφορικό ανώτερης τάξης συνάρτησης. . . . .	413
10.3.2.	Προσεγγιστική μέθοδος Newton - Raphson . . . . .	414
	<i>Ασκήσεις</i> . . . . .	418

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

### Ολοκληρώματα 425

11.1.	Αόριστο ολοκλήρωμα . . . . .	427
11.1.1.	Τύποι αόριστης ολοκλήρωσης . . . . .	430
11.2.	Ορισμένο ολοκλήρωμα (Ολοκλήρωμα Riemann) . . . . .	435
11.2.1.	Ιδιότητες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων . . . . .	444
11.2.2.	Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού . . . . .	453
11.3.	Γενικευμένα ολοκληρώματα . . . . .	459
11.3.1.	Γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου I . . . . .	460
11.3.2.	Γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου II . . . . .	462
11.3.3.	Γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου III. . . . .	465
	<i>Ασκήσεις</i> . . . . .	467

**Μέθοδοι (αόριστης) ολοκλήρωσης 471**

12.1. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή παραγοντική ολοκλήρωση . . . . .	473
12.2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση . . . . .	477
12.3. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων . . . . .	483
12.3.1. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{dx}{x - \alpha}$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ . . . . .	489
12.3.2. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k}$ , $k \in \mathbb{N}$ , $k \geq 2$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ . . . . .	489
12.3.3. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Ax + B}{x^2 + \beta x + \gamma} dx$ , $\beta^2 - 4\gamma < 0$ . . . . .	490
12.3.4. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx$ , $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ , $\beta^2 - 4\gamma < 0$ . . . . .	491
12.4. Ολοκλήρωση συναρτήσεων που ανάγονται σε ρητές συναρτήσεις . . . . .	494
12.4.1. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ , $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	495
12.4.2. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}\right) dx$ , $\lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{N}$ . . . . .	496
12.4.3. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, e^x) dx$ . . . . .	498
12.4.4. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \eta \mu x, \sigma \nu x) dx$ . . . . .	499
12.4.5. Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ , $a > 0$ . . . . .	500

12.4.6. Ολοκληρώματα της μορφής	
$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx,  x  > a, a > 0 \dots\dots\dots$	502
12.4.7. Ολοκληρώματα της μορφής	
$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx,  x  < a, a > 0 \dots\dots\dots$	503
12.4.8. Ολοκληρώματα της μορφής	
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + \gamma})dx, a \neq 0 \dots\dots\dots$	505
<i>Ασκήσεις</i> .....	506

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

### Εφαρμογές ολοκληρωμάτων 513

13.1. Εφαρμογές στη Γεωμετρία. ....	515
13.1.1. Εμβαδόν επιπέδων επιφανειών .....	515
13.1.2. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου μεταξύ δύο καμπυλών . . . .	518
13.1.3. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου σε πολικές συντεταγμένες .....	523
13.1.4. Μήκος επίπεδης καμπύλης .....	524
13.1.5. Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας από περιστροφή . .	531
13.1.6. Όγκος στερεού από περιστροφή .....	535
13.2. Εφαρμογές στη Φυσική .....	538
13.2.1. Μάζα, κέντρο βάρους και ροπή αδράνειας .....	540
13.2.2. Έργο .....	545
13.3. Εφαρμογές στην Οικονομία. ....	547
13.3.1. Συναρτήσεις εσόδων, κόστους, κατανάλωσης, αποταμίευσης .....	547
13.3.2. Πλεόνασμα καταναλωτή και παραγωγού .....	550
13.4. Εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων. ....	552
13.4.1. Μέση τιμή μιας τυχαιάς μεταβλητής. ....	555
13.4.1.1. Ιδιότητες μέσης τιμής .....	555
13.4.2. Διάμεσος μιας κατανομής πιθανοτήτων .....	556
13.4.3. Διακύμανση μιας τυχαιάς μεταβλητής .....	557
13.4.4. Χαρακτηριστικές κατανομές .....	558
<i>Ασκήσεις</i> .....	562

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

### Σειρές συναρτήσεων – Δυναμοσειρές 569

---

14.1. Ακολουθίες συναρτήσεων .....	571
14.2. Σειρές συναρτήσεων .....	575
14.3. Δυναμοσειρές .....	585
14.3.1. Πράξεις μεταξύ δυναμοσειρών .....	601
<i>Ασκήσεις</i> .....	603

### *Βιβλιογραφία* 607

feedimos.gr