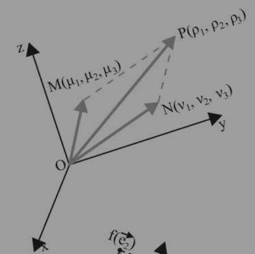
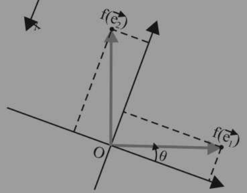
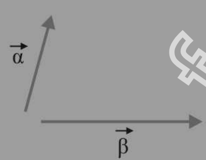
1

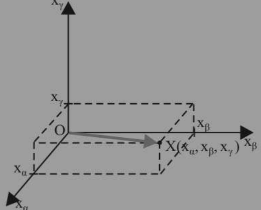
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

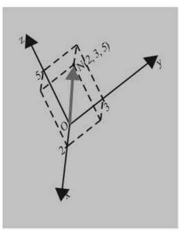
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

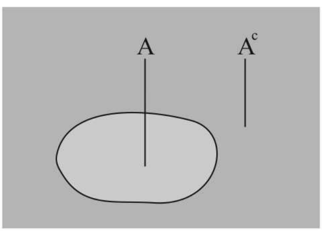


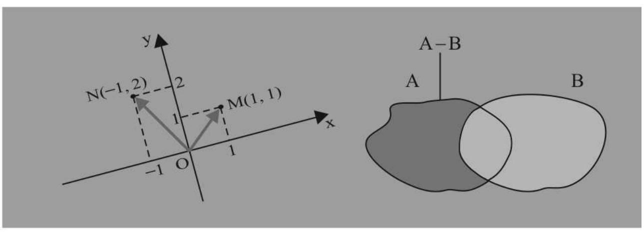












Εισαγωγικές έννοιες

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος όπου παρουσιάζονται θεμελιακές μαθηματικές έννοιες, κυρίως της θεωρίας συνόλων και των κυριότερων αλγεβρικών δομών, που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Η θεωρία συνόλων εισάγεται από τον G. Cantor (1845-1918), περί το 1990, και αποτελεί τη βάση για την ενοποίηση και θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης.

1.1. Σύνολα

Η έννοια του *συνόλου* είναι μια θεμελιώδης (αρχική) έννοια των Μαθηματικών, για την οποία δεχόμεθα ότι επιτρέπεται να οριστεί ως ένα αντικείμενο αποτελούμενο από πολλά (άλλα) αντικείμενα διακεκριμένα και σαφώς καθορισμένα μεταξύ τους, τα οποία καλούνται *στοιχεία του συνόλου.*

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1. *Βασικά σύμβολα*

$\wedge$	και
$\vee$	ή
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\exists!$	υπάρχει μόνο (μονοσήμαντη ύπαρξη)
$:$	τέτοιο ώστε
$:=$	ορίζεται (ή εξ ορισμού)
$\Rightarrow$	συνεπάγεται (αν ... τότε)
$\Leftrightarrow$	ισοδυναμεί (τότε και μόνο τότε)
$\underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$	ισοδυναμεί εξ ορισμού
$\equiv$	συμβολίζεται (ταυτίζεται)

Τα σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, π.χ. Α, Β, Γ, Χ, Υ, Ζ κ.λπ., ενώ τα στοιχεία τους με μικρά, π.χ. α, β, γ, x, y, z κ.λπ.

Ένας κανόνας, με βάση τον οποίο ορίζεται ότι ένα στοιχείο περιέχεται στο σύνολο, είναι αυτός του "ανήκειν" (συμβολικά "$\in$"), που σημαίνει ότι ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο του συνόλου Χ (συμβολικά $x \in X$) και διαβάζεται: x *ανήκει στο* Χ. Ένα στοιχείο x δεν περιέχεται στο σύνολο Χ (συμβολικά $x \notin X$) και διαβάζεται: x *δεν ανήκει στο* Χ. Τέλος, για να υποδειχθεί ότι τα $x, y, z, \omega, \ldots$ είναι στοιχεία ενός συνόλου Χ, χρησιμοποιείται ο επόμενος συμβολισμός

$$\mathrm{X} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \omega, \ldots\} \tag{1.1}$$

Εξάλλου, δεχόμαστε την ύπαρξη του *κενού συνόλου* (συμβολικά $\emptyset$), το οποίο δεν έχει στοιχεία. Επιπλέον, μεταξύ συνόλων ορίζονται κάποιες "σχέσεις" ως εξής:

Η σχέση του "περιέχεσθαι" $\subseteq$: Για δύο σύνολα A, B το A περιέχεται στο B (συμβολικά $A \subseteq B$) ή το A είναι υποσύνολο του $B \underset{ορσ.}{\Leftrightarrow} \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$. (1.2)

Η σχέση του "γνησίως περιέχεσθαι" $\subset$: Για δύο σύνολα A, B το A περιέχεται γνησίως στο B (συμβολικά $A \subset B$) ή το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $B \underset{ορσ.}{\Leftrightarrow} A \subseteq B$ και $\exists\ x \in B : x \notin A$. (1.3)

Η σχέση της "ισότητας" $=$: Για δύο σύνολα A, B το A ισούται με το B (συμβολικά $A = B$) $\underset{ορσ.}{\Leftrightarrow} A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. (1.4)

Η σχέση (1.2) του "περιέχεσθαι" οδηγεί στην έννοια του *δυναμοσυνόλου* ενός (τυχαίο) συνόλου Χ (συμβολικά $\mathcal{P}(\mathrm{X})$) που αποτελείται απ' όλα τα υποσύνολα του Χ και του οποίου βασική σχέση είναι η ισότητα (πρβλ. (1.4)). Προφανώς το $\emptyset$ και το Χ είναι στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, οπότε το $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ είναι μη κενό σύνολο.

Ένα στοιχείο $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, εκτός του ορισμού του δι' αναγραφής των στοιχείων του (πρβλ. (1.1)), ορίζεται και δια περιγραφής αυτών, δηλαδή

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : \ \mathrm{x} \text{ ικανοποιεί την ιδιότητα I}\} \tag{1.5}$$

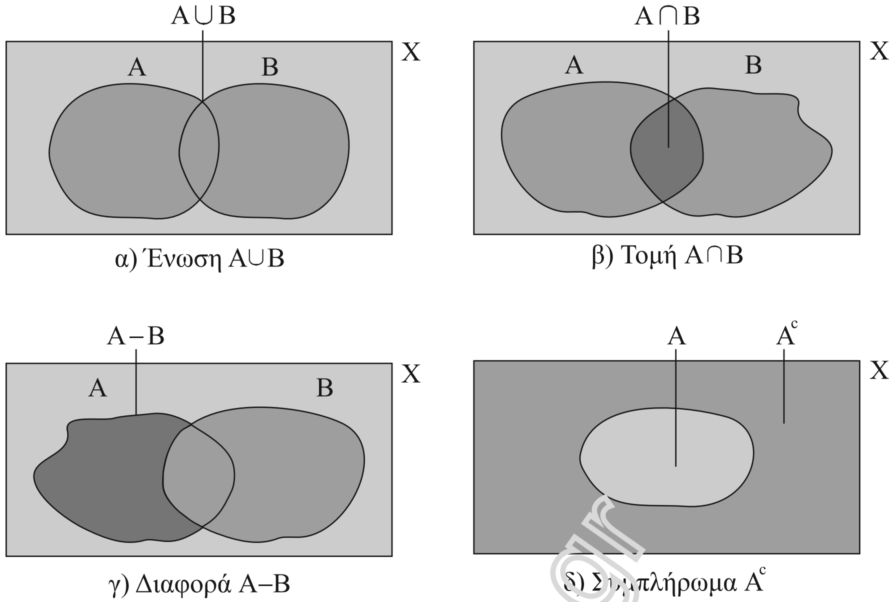
Στο σύνολο $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ ορίζονται οι επόμενες πράξεις: Για δύο (τυχαία) στοιχεία Α, Β του $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ ορίζονται:

α) Ένωση (συμβολικά "$\cup$"), $A \cup B := \{x \in X : x \in A \ \vee x \in B\}$

β) Τομή (συμβολικά "$\cap$"), $A \cap B'' = \{x \in X : x \in A \ \wedge x \in B\}$

γ) Διαφορά (συμβολικά "$-$"), $A - B := \{x \in X : x \in A \ \wedge x \notin B\}$ (1.6)

δ) Συμπλήρωμα (του A ως προς X, συμβολικά "^{c}"), $A^c := \{x \in X : x \notin A\}$



Σχήμα 1.1: *Οι πράξεις των συνόλων.*

Παράδειγμα 1.1.

Τα επόμενα σύνολα αριθμών θεωρούνται γνωστά με την έννοια που έχουν εισαχθεί και μελετηθεί στο Λύκειο:

1. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών
2. $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ των θετικών ακέραιων αριθμών
3. $\mathbb{Z}^- := \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0\} \equiv -\mathbb{Z}^+$ των αρνητικών ακέραιων αριθμών
4. $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$ των ακέραιων αριθμών
5. $\mathbb{Q} := \left\{\dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ των ρητών αριθμών
6. $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών που ορίζεται ως υπερσύνολο όλων των προηγούμενων
7. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ των αρρήτων αριθμών

Για τα προηγούμενα σύνολα ισχύει η επόμενη σχέση

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Σημειώνουμε ότι τα προηγούμενα σύνολα θα εισαχθούν (αξιωματικά) στην παράγραφο 1.3, όπου θα δούμε και την αντίστοιχη δομή τους.

1.1.1. Καρτεσιανό γινόμενο

Αν X, Y είναι δύο μη κενά σύνολα, το σύνολο

$$X \times Y := \{(x,\ y) : x \in X\ \wedge y \in Y\} \tag{1.7}$$

των διατεταγμένων ζευγών (x, y) (: ζεύγη στα οποία ορίζεται πρώτο και δεύτερο στοιχείο) καλείται *καρτεσιανό γινόμενο των* X *και* Y. Στο σύνολο (1.7) ορίζεται "*ισότητα*" (συμβολικά "="),

$$(x, y) = (\alpha, \beta) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} x = \alpha,\ y = \beta \tag{1.8}$$

για κάθε ζεύγος (x, y), (α, β) του $X \times Y$.

Παράδειγμα 1.2.

α) Για τα σύνολα $A := \{1,\ 2,\ 5\}$, $B = \{3,\ 4\}$ ισχύει

$$A \times B = \{(1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (5,3),\ (5,4)\}$$
$$B \times A = \{(3,1),\ (3,2),\ (3,5),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,5)\}$$

β) Για τα σύνολα $\Gamma = \{1,\ 2,\ 3\}$, $\Delta = \{1,\ 4,\ 6\}$ έχουμε

$$\Gamma \times \Delta = \{(1,1),\ (1,4),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,4),\ (2,6),\ (3,1),\ (3,4),\ (3,6)\}$$
$$\Delta \times \Gamma = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3)\}$$

γ) Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x,\ y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται με περισσότερους από δύο παράγοντες ως εξής: Αν $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ είναι μη κενά σύνολα, καρτεσιανό γινόμενο αυτών είναι το σύνολο

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \equiv X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n :=$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\} \tag{1.9}$$

Αν $X_1 = X_2 = \ldots = X_n \equiv X$, τότε σημειώνεται

$$X^n := \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{\text{n φορές}} \tag{1.10}$$

Στην περίπτωση που (τουλάχιστον) ένας από τους παράγοντες του καρτεσιανού γινομένου είναι το κενό σύνολο, τότε ως καρτεσιανό γινόμενο αυτών ορίζεται το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 1.3.

Για το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έχουμε

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

(πρβλ. (1.9), (1.10)).

1.1.2. Σχέσεις συνόλων

Θεωρούμε $X \times Y$ το καρτεσιανό γινόμενο δύο (μη κενών) συνόλων X και Y. Κάθε υποσύνολο Σ του $X \times Y$ καλείται *σχέση από το* X *στο* Y ή ακόμη το Σ *ορίζει μια σχέση από το* X *στο* Y. Αν $X = Y$ το Σ καλείται *σχέση στο* X. Για μια σχέση Σ στο X, ένα στοιχείο $(x, y) \in \Sigma (\subset X \times X)$ γράφεται επίσης $x\Sigma y$.

Παράδειγμα 1.4.

α) Για τα σύνολα A, B του Παραδείγματος 1.2 (α), το $\Sigma = \{(2, 4)\} \subset A \times B$ ορίζει μια σχέση από το A στο B.

β) Για τα σύνολα Γ, Δ του Παραδείγματος 1.2 (β), το $\Sigma = \{(2, 4),\ (3, 6)\} \subset \Gamma \times \Delta$ ορίζει μια σχέση από το Γ στο Δ.

γ) Αν X είναι το σύνολο των περιττών και Y των άρτιων πραγματικών αριθμών, το $\Sigma = \{(x, y) : x \in X \times Y : y \text{ είναι διπλάσιος του } x\} \subset X \times Y$ ορίζει μια σχέση από το X στο Y.

Ορισμός 1.1. Μια σχέση Σ στο X καλείται *σχέση διάταξης* (ή *διάταξη*) στο X, αν ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

1. $x\Sigma x$, για κάθε $x \in X$ (*αυτοπαθής*)
2. αν $x\Sigma y$ και $y\Sigma x$, τότε $x = y$ (*αντισυμμετρική*)
3. αν $x\Sigma y$ και $y\Sigma z$, τότε $x\Sigma z$ (*μεταβατική*)

Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια διάταξη Σ (συμβολικά (X, Σ) ή απλά X, αν δεν υπάρχει σύγχυση) καλείται *διατεταγμένο σύνολο*. ❑

Παρατήρηση 1.1.

α) Αν μια σχέση Σ του X ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 3 του Ορισμού 1.1 και την

$$\textit{αν } x\Sigma y \textit{ τότε και } y\Sigma x \ (\textit{συμμετρική}) \tag{1}$$

για κάθε $x, y \in X$, τότε η Σ καλείται *σχέση ισοδυναμίας* του X και τα στοιχεία $(x, y) \in \Sigma$ *ισοδύναμα*.

β) Αν (X, Σ) είναι διατεταγμένο σύνολο για το οποίο επιπλέον ισχύει η ιδιότητα

$$\textit{για κάθε } x, y \in X \Rightarrow x\Sigma y \vee y\Sigma x \tag{2}$$

τότε η Σ καλείται *γραμμική* (ή *ολική*) *διάταξη* και το (X, Σ) *γραμμικά* (ή *ολικά*) *διατεταγμένο σύνολο*.

γ) Αν (X, Σ) είναι διατεταγμένο σύνολο, ορίζεται η *δυϊκή διάταξη* Σ' $(\subseteq X \times X)$ της Σ, έτσι ώστε

$$x\Sigma' y \underset{\text{ορσ.}}{\iff} y\Sigma x, \ \text{για κάθε } x, y \in X \tag{3}$$

Η Σ' ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-3 του Ορισμού 1.1 και επιπλέον είναι γραμμική αν η Σ είναι γραμμική.

Στη συνέχεια σ' ένα διατεταγμένο σύνολο (X, Σ) δίνεται η έννοια του φραγμένου συνόλου ως εξής:

Θεωρούμε (X, Σ) ένα διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq X$. Το A καλείται άνω φραγμένο (αντίστ. κάτω φραγμένο) στο X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\beta \in X$ (αντίστ. $\alpha \in X$) έτσι ώστε $x\Sigma\beta$ (αντίστ. $\alpha\Sigma x$.). Το A καλείται φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο. Σε ένα άνω (αντίστ. κάτω) φραγμένο σύνολο A στο X, το στοιχείο β (αντίστ. α) του X καλείται άνω (αντίστ. κάτω) φράγμα του A. (1.11)

Εξάλλου, σ' ένα φραγμένο σύνολο A στο X ορίζεται το supremum και το infimum του A ως εξής:

Θεωρούμε A ένα άνω φραγμένο σύνολο στο X. Καλούμε supremum (ή άνω πέρας) του A στο X (συμβολικά $\sup A$*) το μικρότερο από τα άνω φράγματα του A, αν υπάρχει. Επιπλέον, αν το A είναι κάτω φραγμένο στο X, καλούμε infimum (ή κάτω πέρας) του A στο X (συμβολικά* $\inf A$*) το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του A, αν υπάρχει.* (1.12)

Για ένα $A \subseteq X$, τα $\sup A,\ \inf A$, όταν υπάρχουν (πρβλ. (1.12)) δεν είναι, γενικά, στοιχεία του A. Αν $\sup A \in A$, τότε $\sup A = \max A$ (: *μέγιστο στοιχείο του* A) και αν $\inf A \in A$, τότε $\inf A = \min A$ (: *ελάχιστο στοιχείο του* A).

Παράδειγμα 1.5.

α) Για το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ισχύει $\sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{R}$ και $\inf \mathbb{N} = 1 = \min \mathbb{N}$, όπου $+\infty$ (και το $-\infty$) είναι το λεγόμενο κατ' εκδοχήν σημείο.

β) Για τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ ισχύει $\sup \mathbb{Z} = +\infty,\ \inf \mathbb{Z} = -\infty,\ \sup \mathbb{Q} = +\infty$ και $\inf \mathbb{Q} = -\infty$.

1.2. Απεικονίσεις

Από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας συνόλων είναι αυτή της *απεικόνισης* (ή *συνάρτησης*), με πλήθος εφαρμογών στα Μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες. Με τη βοήθεια αυτής μαθηματικοποιούνται τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας (έστω y), οι οποίες εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας (έστω x). Οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με έναν κανόνα (ή νόμο) f, έτσι ώστε η μεταβλητή y εκφράζεται από τη x μέσω της f, οπότε συμβολικά γράφουμε

$$y = f(x) \tag{1.13}$$

Τα προηγούμενα οδηγούν στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.2. Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα X και Y. *Απεικόνιση* από το X στο Y καλείται ένας *κανόνας* (ή *νόμος*), συμβολικά "f", με τον οποίο αντιστοιχίζεται σε κάθε στοιχείο του X ένα και μόνο στοιχείο του Y, έτσι ώστε γράφουμε συμβολικά

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x) \quad \text{ή}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \ \text{ με } \ y = f(x) \ \text{ ή απλά (αν δεν υπάρχει σύγχυση)} \tag{1.14}$$

$$y = f(x)$$ ❑

Παρατήρηση 1.2.

α) Σε ορισμένα συγγράμματα δίνεται η έννοια της *συνάρτησης* (αντί της *απεικόνισης*) σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.
Για την αποφυγή σύγχυσης και για ενιαία ορολογία, στο παρόν βιβλίο η έννοια της απεικόνισης θα είναι σύμφωνη με τον Ορισμό 1.2.

β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα και την παράγραφο 1.1.2, ένα υποσύνολο A του $X \times Y$, όπου X, Y είναι μη κενά σύνολα, δηλαδή μία σχέση του X στο Y, ορίζει μια απεικόνιση, έτσι ώστε

$$A = \{(x, y) \in X \times Y : \text{κάθε } x \in X \text{ ανήκει σ' ένα ζεύγος } (x, y)\}$$

με αποτέλεσμα να γράφουμε $(x, y) \in A$ αντί $y = A(x)$. ❑

Το στοιχείο $x \in X$ καλείται *ανεξάρτητη μεταβλητή* και το $y(= f(x)) \in Y$ *εξαρτημένη μεταβλητή*. Το σύνολο X καλείται *πεδίο ορισμού* (π.ο.) και το σύνολο Y *πεδίο τιμών* (π.τ.) της f. Για $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ το σύνολο

$$f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y \tag{1.15}$$

καλείται *εικόνα του* A *μέσω της* f και το f(X) λέγεται *εικόνα της* f (συμβολικά Imf).

Το σύνολο

$$f^{-1}(B) := \{x \in A : f(x) \in B\} \subset X \tag{1.16}$$

λέγεται *αντίστροφη εικόνα του* B *μέσω της* f, έτσι ώστε

$$x \in f^{-1}(B) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) \in B \tag{1.17}$$

Παράδειγμα 1.6.

α) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ είναι μια απεικόνιση με π.ο. και π.τ. τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$.

β) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι μια απεικόνιση με π.ο. το $\mathbb{R}$, π.τ. το $\mathbb{R}$ και εικόνα $f(\mathbb{R})$ το σύνολο $\{1, 0\} \subset \mathbb{R}$.

Οι απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Z \to \Omega$ καλούνται *ίσες* (συμβολικά $f = g$) τότε, και μόνο τότε, αν $X = Z$, $Y = \Omega$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

Εξάλλου, για μια απεικόνιση $f : X \to Y$ και $A \subseteq X$, η απεικόνιση

$$f|_A : A \to Y : x \mapsto (f|_A)(x) := f(x) \tag{1.18}$$

καλείται *περιορισμός της* f *στο A*. Επιπλέον, αν X, Y είναι δύο (μη κενά) σύνολα, $A \subseteq X$, και $f : A \to Y$ μια απεικόνιση, τότε η απεικόνιση $\widetilde{f} : X \to Y$ καλείται *επέκταση της* f *από το* A *στο* X, αν

$$\widetilde{f}|_A = f \tag{1.19}$$

δηλαδή $\widetilde{f}(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$.

1.2.1. Αντίστροφη απεικόνιση

Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται *1-1* (ή *αμφιμονοσήμαντη*), αν για x_1, $x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, ή, ισοδύναμα, αν δεν υπάρχουν x_1, $x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Αν η f είναι 1-1, τότε για κάθε $y \in f(X)$ $\exists!\ x \in X$ με $f(x) = y$, δηλαδή η f είναι *αντισρέψιμη,* που σημαίνει ότι ορίζεται μια απεικόνιση $g : f(X) \to X$ με $g(y) := x$, η οποία καλείται *αντίστροφη της* f (συμβολικά f^{-1}), έτσι ώστε

$$f^{-1} : f(X) \to X \quad \text{με } f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y \tag{1.20}$$

για κάθε $x \in X$, $y \in f(X)$.

Επιπλέον, η $f : X \to Y$ είναι επί του Y, αν $f(X) = Y$.

Παράδειγμα 1.7.

α) Η απεικόνιση f του Παραδείγματος 1.6 (β) δεν είναι 1-1, ούτε επί.
Πράγματι, επειδή $f(\mathbb{R}) = \{1, 0\} \subset \mathbb{R}$, η f δεν είναι επί, ενώ $f(2) = 1 = f(3)$, που σημαίνει ότι η f δεν είναι 1-1.

β) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ είναι 1-1 και επί.
Πράγματι, για x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 = f(x_2)$ προκύπτει $x_1 = x_2$, δηλαδή η f είναι 1-1. Επιπλέον, αν $y = 2x + 1$, τότε $x = \dfrac{y-1}{2}$ έτσι ώστε για τυχαίο $y \in \mathbb{R}$ ορίζεται το $x = \dfrac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ με $f(x) = f\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{y-1}{2} + 1 = y$ που σημαίνει ότι η f είναι επί.

γ) Η απεικόνιση του (β) αντιστρέφεται, αφού είναι 1-1 και επί και η αντίστροφή της είναι η απεικόνιση $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

Σημείωση 1.1. Η ανεξάρτητη μεταβλητή απεικονίσεων συμβολίζεται γενικά με x και η εξαρτημένη με y. Στις αντίστροφες απεικονίσεις και για ενιαίο συμβολισμό κάνουμε αλλαγή μεταβλητής ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται επίσης με x (Παράδειγμα 1.7 (β), (γ)).
Άμεση συνέπεια των προηγούμενων είναι η

Πρόταση 1.1. Αν $f : X \to Y$ είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση, τότε
α) η f^{-1} είναι 1-1 απεικόνιση του Y επί του X
β) $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in X$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in Y$. ❑

Εφαρμογή 1.1. (Ταυτοτική απεικόνιση)

Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, η απεικόνιση

$$id_X : X \to X : x \mapsto id_X(x) := x \tag{1.21}$$

καλείται *ταυτοτική απεικόνιση* του X. Από τον ορισμό της η id_X είναι 1-1 και επί (του X) απεικόνιση, έτσι ώστε ορίζεται η αντιστροφή της $id_X^{-1} : X \to X$, η οποία ισούται προφανώς με την id_X.

Εφαρμογή 1.2. (Απεικονίσεις - Προβολές)

Για μια πεπερασμένη οικογένεια (μη κενών) συνόλων $(X_\kappa)_{\kappa=1,\ldots,n}$ θεωρούμε το αντίστοιχο (πεπερασμένο) καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{\kappa=1}^{n} X_\kappa \equiv X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Τότε, ορίζονται οι απεικονίσεις

$$pr_i : \prod_{\kappa=1}^{n} X_\kappa \to X_i : (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto pr_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) := x_i \tag{1.22}$$

όπου τα στοιχεία $(x_\kappa)_{\kappa=1,\dots,n} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ του καρτεσιανού γινομένου αντιστοιχούν στην i-συντεταγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$. Η απεικόνιση (1.22) καλείται i-*προβολή* του $\prod_{\kappa=1}^{n} X_\kappa$. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{R}^3 = \{x \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$, τότε ορίζονται

- *η πρώτη* (ή *1-*) *προβολή* $pr_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto pr_1(x) = x_1$
- *η δεύτερη* (ή *2-*) *προβολή* $pr_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto pr_2(x) := x_2$
- *η τρίτη* (ή *3-*) *προβολή* $pr_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto pr_3(x) := x_3$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση (1.22), i-προβολή, είναι *επί αλλά όχι* 1-1.

1.2.2. Σύνθεση απεικονίσεων

Θεωρούμε δύο απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Καλούμε *σύνθεση των* f *και* g (συμβολικά $g \circ f$) μια απεικόνιση

$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (1.23)$$

την οποία διαβάζουμε g *του* f (Σχήμα 1.2).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.2: *Σύνθεση g του f.*

Παράδειγμα 1.8.

Δίνονται οι απεικονίσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$. Τότε η σύνθεση g του f(: $g \circ f$) είναι η απεικόνιση $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Ιδιαιτέρως, η σύνθεση f του g (: $f \circ g$) είναι η απεικόνιση $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 1$$

Παρατηρούμε ότι $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 + 1 \neq (2\mathrm{x}+1)^2 = (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})(\mathrm{x}),\ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$. Γενικότερα ισχύει $\mathrm{f} \circ \mathrm{g} \neq \mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ για δύο απεικονίσεις f, g ορισμένες στο ίδιο σύνολο X.

Άμεση συνέπεια των προηγούμενων είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.2. Αν οι απεικονίσεις $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ και $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ είναι 1-1 και επί, τότε η $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ είναι επίσης 1-1 και επί και ισχύει $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f})^{-1} = \mathrm{f}^{-1} \circ \mathrm{g}^{-1}$. ❑

Για την ύπαρξη της αντίστροφης απεικόνισης $\mathrm{f}^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ μιας απεικόνισης $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ χρησιμοποιείται επίσης ο επόμενος ισχυρισμός:

Η απεικόνιση f είναι αντιστρέψιμη (ισοδύναμα 1-1 και επί) τότε και μόνο τότε αν ισχύει

$$f \circ f^{-1} = id_Y \quad \textit{και} \quad f^{-1} \circ f = id_X \tag{1.24}$$

όπου id_X, id_Y είναι οι αντίστοιχες ταυτοτικές απεικονίσεις των X, Y.

Παρατήρηση 1.3.

α) Ένα σύνολο X λέγεται *ισοδύναμο* με το σύνολο Y, αν υπάρχει μια *1-1* απεικόνιση f του X *επί* του Y και γράφουμε $\mathrm{X} \underset{\mathrm{f}}{\sim} \mathrm{Y}$. Η ισοδυναμία συνόλων ορίζει μια *σχέση ισοδυναμίας* σύμφωνα με τις επόμενες ιδιότητες:

i) $\mathrm{X} \underset{\mathrm{id_X}}{\sim} \mathrm{X}$

ii) αν $\mathrm{X} \underset{\mathrm{f}}{\sim} \mathrm{Y}$, τότε $\mathrm{Y} \underset{\mathrm{f}^{-1}}{\sim} \mathrm{X}$

iii) αν $\mathrm{X} \underset{\mathrm{f}}{\sim} \mathrm{Y}$ και $\mathrm{Y} \underset{\mathrm{g}}{\sim} \mathrm{Z}$, τότε $\mathrm{X} \underset{\mathrm{g} \circ \mathrm{f}}{\sim} \mathrm{Z}$

(πρβλ. Παρατήρηση 1.1 (α)).

β) Ένα σύνολο X καλείται *αριθμήσιμο,* αν είναι ισοδύναμο με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

γ) Ένα σύνολο X καλείται *πεπερασμένο,* αν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\mathrm{X} \sim \{1, 2, \ldots, \kappa\}$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός κ καλείται *πλήθος* των στοιχείων του X.

Για παράδειγμα, το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_i}$ των συνόλων $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X_n}$ (πρβλ. (1.9)) είναι πεπερασμένο με πλήθος στοιχείων n.

Ένα μη πεπερασμένο σύνολο καλείται *άπειρο.*

Τέλος, ένα αριθμήσιμο ή πεπερασμένο σύνολο καλείται *το πολύ αριθμήσιμο.*

1.3. Πραγματικοί αριθμοί

Στην παράγραφο 1.1 (Παράδειγμα 1.1) έχει γίνει μια αναφορά στους πραγματικούς, φυσικούς, ακέραιους, ρητούς αριθμούς όπως αυτοί έχουν χρησιμοποιηθεί στο Λύκειο. Κρίνεται σκόπιμη μια σύντομη περιγραφή της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών και κατ' επέκταση του ορισμού των υπολοίπων, αφενός για λόγους επιστημονικής πληρότητας, λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος των εν λόγω αριθμών στις εφαρμογές, και αφετέρου ως μια εισαγωγή της έννοιας των αλγεβρικών δομών που θα γενικευθεί στην παράγραφο 1.5.

Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται στοιχεία ενός (μη κενού) συνόλου $\mathbb{R}$, για το οποίο ισχύουν τα επόμενα αξιώματα.

Αξίωμα Ι (Σώματος). Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζονται δύο (εσωτερικές) πράξεις (πρβλ. σχετικά παράγραφο 1.5):

η πρόσθεση

(Π) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto +(x, y) := x + y$

και *ο πολλαπλασιασμός*

(Μ) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cdot(x, y) := x \cdot y$

έτσι ώστε η εικόνα ενός ζεύγους (x, y) στοιχείων του $\mathbb{R}$ μέσω της απεικόνισης "$+$" (αντίστ. "$\cdot$") ορίζει ακριβώς ένα στοιχείο $x + y \in \mathbb{R}$ (αντίστ. $x \cdot y \in \mathbb{R}$), το οποίο καλείται άθροισμα (αντίστ. γινόμενο) των x, y. Για τις δύο πράξεις (Π) και (Μ) υποθέτουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (*αξιώματα σώματος*) για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(Π1) $x + y = y + x$ (μεταθετικότητα)

(Π2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (προσεταιριστικότητα)

(Π3) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $x + 0 = x$
(0: ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)

(Π4) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα στοιχείο $(-x) \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $x + (-x) = 0$
($-x$: αντίθετο στοιχείο του x)

(Μ1) $x \cdot y = y \cdot x$ (μεταθετικότητα)

(Μ2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (προσεταιριστικότητα)

(Μ3) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{R}$ με $1 \neq 0$, έτσι ώστε $x \cdot 1 = x$
(1: ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)

(M4) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ένα στοιχείο $x^{-1} \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$
(x^{-1}: αντίστροφο στοιχείο του x)

(Π-Μ) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (επιμεριστικότητα) ❑

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης 0 (αντίστ. του πολλαπλασιασμού 1) καλείται *μηδέν* ή *μηδενικό στοιχείο* (αντίστ. *μονάδα* ή *μοναδιαίο στοιχείο*) του $\mathbb{R}$.

Από τις σχέσεις (Π) και (Π4) ορίζεται η *διαφορά* δύο στοιχείων $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x - y := x + (-y) \tag{1.25}$$

ενώ από τις (Μ) και (Μ4) ορίζεται το *πηλίκο* δύο στοιχείων $x, y \in \mathbb{R}$ $(y \neq 0)$,

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1} \tag{1.26}$$

Αξίωμα ΙΙ (Διάταξης). Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται μια σχέση διάταξης "$\leq$", όπου για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $x \leq y$ και διαβάζεται "x *μικρότερο ή ίσο* y" (Ορισμός 1.1 για $\Sigma \equiv \leq$), ενώ η δυϊκή της είναι η "$\geq$", όπου για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $y \geq x$ και διαβάζεται "y *μεγαλύτερο ή ίσο* x" (πρβλ. Παρατήρηση 1.1 (γ)). Υποθέτουμε ότι η "$\leq$" ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες (*αξιώματα διάταξης*) για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(Δ1) $x \leq x$ (αυτοπαθής)

(Δ2) Αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$ (αντισυμμετρική)

(Δ3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$ (μεταβατική)

(Δ4) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x \leq y$ ή $y \leq x$

(Δ5) Αν $x \leq y$, τότε $x + z \leq y + z$

(Δ6) Αν $x \leq y$, τότε $x \cdot z \leq y \cdot z$ με $z \in \mathbb{R}$, $0 \leq z$ ❑

Σύμφωνα με τα αξιώματα διάταξης και τον Ορισμό 1.1, το $\mathbb{R}$ *είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο*.

Εξάλλου θέτουμε εξ ορισμού

(Δ7) $x < y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} x \leq y$ και $x \neq y$

(x *μικρότερο* y) και $y > x$ (y *μεγαλύτερο x*).

Ένα στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ καλείται *θετικός* (αντίστ. *αρνητικός*) πραγματικός αριθμός αν $x > 0$ (αντίστ. $x < 0$), και *μη αρνητικός* (αντίστ. *μη θετικός*) αν $x \geq 0$ (αντίστ. $x \leq 0$).

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται η *απόλυτη τιμή* ενός $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ (συμβολικά $|\mathrm{x}|$), ως ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$, από τη σχέση

$$|\mathrm{x}| := \begin{cases} \mathrm{x}, & \text{αν } \mathrm{x} \geq 0 \\ -\mathrm{x}, & \text{αν } \mathrm{x} < 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Άμεση συνέπεια της (1.27) είναι οι επόμενες ιδιότητες της απόλυτης τιμής:

$$\begin{aligned}
&\alpha)\ |x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\beta)\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
&\gamma)\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\delta)\ |x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\varepsilon)\ |x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\sigma\tau)\ ||x| - |y|| \leq |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Από τα Αξιώματα Ι, ΙΙ προκύπτουν οι επόμενοι ισχυρισμοί:

α) Η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ έχει μοναδική λύση $x = \beta - \alpha$ (πρβλ. (1.25)), οπότε το 0 και ο αντίθετος $-\alpha$ του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικοί.

β) Η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$, με $\alpha \neq 0$, έχει τη μοναδική λύση $x = \alpha^{-1} \cdot \beta = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (πρβλ. (1.26)), οπότε το 1 και ο αντίστροφος α^{-1} του $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι μοναδικοί. (1.29)

Στη συνέχεια, με βάση τα Αξιώματα Ι και ΙΙ του $\mathbb{R}$, ορίζονται τα σύνολα των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και των ρητών $\mathbb{Q}$.

Πιο συγκεκριμένα, ένα $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ καλείται *επαγωγικό* αν $1 \in \mathrm{A}$ και για $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ έπεται $\mathrm{x} + 1 \in \mathrm{A}$. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο. Έτσι,

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι το ελάχιστο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δηλαδή

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \in A\ \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ επαγωγικό}\} \equiv \bigcap_{A \subseteq \mathbb{R}} A, \tag{1.30}$$

Α επαγωγικό, που σημαίνει ότι το $\mathbb{N}$ ισούται με την τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Συνεπώς, επειδή $1 \in \mathbb{N}$, θέτουμε $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1, \ldots$ και επομένως

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, n + 1, \ldots\} \tag{1.31}$$

που είναι η συνηθισμένη έκφραση του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Άμεση συνέπεια της (1.30) είναι η επόμενη

Πρόταση 1.3 (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής). Αν p είναι μια μαθηματική ιδιότητα, η p(x) ισχύει αν ο x ικανοποιεί την p. Υποθέτουμε ότι

1. ισχύει η $p(1)$
2. αν ισχύει η $p(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει και η $p(n + 1)$

Τότε ισχύει η $p(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ❑

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι χρήσιμη και ως *μέθοδος ορισμού εννοιών* για φυσικούς αριθμούς.

Παρατήρηση 1.4.

α) *n-παραγοντικό*. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται το *n-παραγοντικό*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{και} \quad 0! := 1 \tag{1.32}$$

ενώ $(n + 1)! = n!(n + 1)$

β) *n ανά k*. Για $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{Z}^+$ ορίζεται ως *συνδυασμός* n *ανά* k,

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{αν } 1 \leq k \leq n \tag{1.33}$$

$$\text{και} \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \text{αν } k = 0$$

Άμεση συνέπεια των (1.32), (1.33) είναι οι σχέσεις

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \tag{1.34}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}, \quad 0 \leq k \leq n \tag{1.35}$$

Σημειώνουμε ότι οι (1.33) και (1.35) ισχύουν και για $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ δηλαδή αν στη θέση του n τεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ) *Διωνυμικός τύπος του Newton.* Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(\alpha+\beta)^n = \alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\cdot\beta + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}\cdot\beta^2 + \ldots +$$

$$+\binom{n}{n-1}\alpha\cdot\beta^{n-1} + \beta^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\cdot\beta^k \qquad (1.36)$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των *ακέραιων αριθμών* ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbb{Z} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{\ldots, -m, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \subseteq \mathbb{R} \qquad (1.37)$$

Επιπλέον, το σύνολο $\mathbb{Q}$ των *ρητών αριθμών* ορίζεται από την

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\} \subseteq \mathbb{R} \qquad (1.38)$$

έτσι ώστε προκύπτει η γνωστή σχέση

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad (1.39)$$

(πρβλ. Παράδειγμα 1.1).

Στην παράγραφο 1.1 (πρβλ. (1.11), (1.12)) έχει εισαχθεί η έννοια του ελάχιστου άνω φράγματος (supremum) και μέγιστου κάτω φράγματος (infimum) ενός φραγμένου συνόλου Α σ' ένα σύνολο Χ. Επειδή η ύπαρξη ενός ελάχιστου άνω φράγματος (αντίστ. μέγιστου κάτω φράγματος) στο $\mathbb{R}$ δεν είναι συνέπεια των Αξιωμάτων Ι, ΙΙ, εισάγεται το επόμενο

Αξίωμα ΙΙΙ (Ελάχιστου άνω φράγματος). Αν Α είναι μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το Α έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\alpha = \sup A$. ❑

Άμεση συνέπεια του Αξιώματος ΙΙΙ είναι η επόμενη

Πρόταση 1.4 (ύπαρξη n-οστής ρίζας). Για κάθε μη αρνητικό $\alpha \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ υπάρχει ένας μοναδικός μη αρνητικός αριθμός $\beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\beta^n = \alpha$. ❑

Έτσι ο αριθμός β καλείται *θετική* n-*οστή ρίζα του* α και συμβολίζεται $\sqrt[n]{\alpha}$ ή $\alpha^{\frac{1}{n}}$. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται και η ύπαρξη των μη ρητών αριθμών ($: \mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \emptyset$), οι οποίοι ονομάζονται *άρρητοι αριθμοί.*

Συνεπώς, ορίζονται οι δυνάμεις αριθμών $\alpha \in \mathbb{R}$ με ρητούς εκθέτες, έτσι ώστε αν $\alpha > 0$ και $\rho = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ με $\frac{m}{n} > 0$, ισχύει

$$\alpha^{\rho} := \left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^{m} \tag{1.40}$$

Επιπλέον, για $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ θέτοντας εξ ορισμού

$$0^{\rho} := 0 \ (\rho \neq 0), \quad \beta^{0} := 1, \quad \alpha^{-\rho} := \frac{1}{\alpha^{\rho}} \tag{1.41}$$

Ορισμός 1.3. Ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τα αξιώματα I, II, III καλείται *σύνολο πραγματικών αριθμών* και τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ονομάζονται *πραγματικοί αριθμοί*.

Σχόλιο 1.1. Αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{R}$ είναι το μοναδικό σύνολο που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα, αφού κάθε άλλο σύνολο εφοδιασμένο με τα εν λόγω αξιώματα συμπίπτει με το $\mathbb{R}$ μέσω μιας κατάλληλης 1-1 και επί απεικόνισης που διατηρεί το άθροισμα, το γινόμενο και τη διάταξη.

1.4. Μιγαδικοί αριθμοί

Η ανυπαρξία πραγματικών λύσεων σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \ \alpha \neq 0, \ \alpha, \ \beta, \ \gamma \in \mathbb{R}$, όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, δηλαδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, οδηγεί στην επέκταση του συνόλου $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, στο οποίο έχουν λύση αυτές οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού και ικανοποιούνται ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Έτσι, στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ορίζονται οι πράξεις:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \ \ (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \ \beta + \delta) \\ &\text{ii)} \ (\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \ \alpha\delta + \beta\gamma) \end{aligned} \tag{1.42}$$

έτσι ώστε το σύνολο

$$\mathbb{C} \equiv (\mathbb{R}^2, \ +, \ \cdot\ ) \tag{1.43}$$

καλείται *σύνολο μιγαδικών αριθμών* και τα στοιχεία του *μιγαδικοί αριθμοί*.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζονται

- το *μηδενικό στοιχείο* (ή *μηδέν*), το $(0,0)$
- το *μοναδιαίο στοιχείο* (ή *μονάδα*), το $(1,0)$
- ο *αντίθετος ενός* $z=(x,y)(\in\mathbb{C})$, ο $-z=(-x,-y)$
- ο *αντίστοφος ενός* $z=(x,y)\in\mathbb{C}-\{(0,0)\}$,

  ο $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

(1.44)

Εξάλλου ο μιγαδικός αριθμός $i:=(0,1)$ (: *φανταστική μονάδα*) ικανοποιεί την ιδιότητα

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=-1 \tag{1.45}$$

(πρβλ. (1.42 (ii))), έτσι ώστε

> *Κάθε μιγαδικός αριθμός* $z\equiv(x,y)\in\mathbb{C}$ *είναι της μορφής* $z=x+iy$ (1.46)

Πράγματι, από τις (1.42 (i)) και (1.45) έχουμε

$$z=(x,y)=(x,0)\cdot(1,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x\cdot 1+i\cdot y=x+iy$$

Η μορφή (1.46) των μιγαδικών αριθμών είναι η πλέον συνηθισμένη και ευκολότερη στους υπολογισμούς. Επιπλέον, για ένα $z=x+iy$, το στοιχείο x καλείται *πραγματικό μέρος* του z (συμβολισμός Rez) και το y *φανταστικό μέρος* του z (συμβολισμός Imz). Εξάλλου, για κάθε $z=x+iy$ ορίζονται

- ο *συζυγής* $\bar{z}$ του z : $\bar{z}=x-iy$
- το *μέτρο* $|z|$ του z : $|z|:=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ (1.47)

Για κάθε z, $\omega\in\mathbb{C}$ ισχύουν οι ιδιότητες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2. *Ιδιότητες μιγαδικών αριθμών*

1. $\overline{z+\omega} = \bar{z} + \bar{\omega}$	7. $\lvert z\rvert \leq \lvert \mathrm{Re}z\rvert + \lvert \mathrm{Im}z\rvert$
2. $\overline{z\cdot\omega} = \bar{z}\cdot\bar{\omega}$	8. $\lvert z\cdot\omega\rvert = \lvert z\rvert\cdot\lvert\omega\rvert$
3. $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{\omega}}$, όπου $\frac{z}{\omega} := z\cdot\omega^{-1}$, $\omega \neq 0$	9. $\left\lvert\frac{z}{\omega}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert\omega\rvert}$, $\omega\neq 0$
4. $\bar{\bar{z}} = z$	10. $\lvert z+\omega\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert\omega\rvert$
5. $-\lvert z\rvert \leq \mathrm{Re}z \leq \lvert z\rvert$	11. $\lvert z-\omega\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert\omega\rvert$
6. $-\lvert z\rvert \leq \mathrm{Im}z \leq \lvert z\rvert$	12. $\lvert\lvert z\rvert - \lvert\omega\rvert\rvert \leq \lvert z-\omega\rvert$

1.5. Σύνολα με αλγεβρική δομή

Στην άλγεβρα υπάρχει ενδιαφέρον όχι μόνο για συλλογές στοιχείων σε σύνολα και υποσύνολα, αλλά και για σύνολα και υποσύνολα που έχουν κανόνες για υπολογισμούς στοιχείων που δίνουν άλλα στοιχεία. Με τον τρόπο αυτό ορίζονται (αλγεβρικές) δομές σε σύνολα, οι απλούστερες των οποίων είναι οι ομάδες και οι δακτύλιοι. Οι ομάδες χρησιμοποιήθηκαν από τους Galois και Lagrange στην επιλυσιμότητα εξισώσεων, ενώ οι δακτύλιοι στην προσπάθεια των ερευνητών να επιλύσουν το γνωστό πρόβλημα του Fermat.

Κατ' αρχήν (εσωτερική) *πράξη* σ' ένα μη κενό σύνολο X είναι μια απεικόνιση

$$\sigma : X \times X \to X : (x,y) \mapsto \sigma(x,y) := x\sigma y \tag{1.48}$$

Για κάθε πράξη χρησιμοποιείται και ένα σύμβολο, όπως $\circ$, $*$, $\cdot$, $+$, $\times$ κ.λπ., που τοποθετείται ανάμεσα στα στοιχεία ενός συνόλου.

Για παράδειγμα, η πρόσθεση (Π) και ο πολλαπλασιασμός (Μ) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι (εσωτερικές) πράξεις του $\mathbb{R}$.

Σημείωση 1.2. Γενικά, για τρία μη κενά σύνολα X, Y, Z μια απεικόνιση

$$\tau :\ X \times Y \to Z :\ (x,y) \mapsto \tau(x,y) := x\tau y \tag{1.49}$$

καλείται *πράξη*. Αν $X = Y = Z$, τότε η πράξη τ είναι *εσωτερική πράξη,* σύμφωνα με την (1.48). Ιδιαιτέρως, αν $Y = Z$, τότε η πράξη

$$\tau : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto \tau(x, y) := x\tau y \qquad (1.50)$$

καλείται *εξωτερική πράξη του* X *στο* (ή *επί του*) Y ή ακόμη και *δράση του* X *στο* (ή *επί του*) Y.

Στην παράγραφο 2.5 και ακόμη περισσότερο στο κεφάλαιο 3 (πρβλ. επίσης κεφάλαια 4, 5) θα ασχοληθούμε με εξωτερικές πράξεις όπου το σύνολο X είναι οι πραγματικοί αριθμοί και ακόμη γενικότερα ένα σώμα (πρβλ. παράγραφο 1.5.3).

Ένα σύνολο X στο οποίο έχει οριστεί τουλάχιστον μία πράξη, έστω ∘, καλείται σύνολο με *αλγεβρική δομή* και συμβολίζεται (X, ∘) ή απλά X (όταν η πράξη είναι δεδομένη).

Εξάλλου, ένα σύνολο είναι *κλειστό* ως προς μια πράξη αν για κάθε ζεύγος στοιχείων το αποτέλεσμα της πράξης (δηλαδή η εικόνα της απεικόνισης (1.48)) είναι επίσης στοιχείο του συνόλου. Για παράδειγμα, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση (Π) και τον πολλαπλασιασμό (Μ) (παράγραφος 1.3).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πράξεις που υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς. Για παράδειγμα, μια πράξη "∘" σ' ένα σύνολο X ($\neq \emptyset$) καλείται προσεταιριστική (αντίστ. μεταθετική) αν $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (αντίστ. $x \circ y = y \circ x$), για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$. Έτσι, οι πράξεις της πρόσθεσης (Π) και του πολλαπλασιασμού (Μ) στο $\mathbb{R}$ είναι προσεταιριστικές (αντίστ. μεταθετικές). Πρβλ. (Π2), (Μ2) (αντίστ. (Π1), (Μ1)) της παραγράφου 1.3. Ομοίως, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$ (πρβλ. (1.42)) είναι προσεταιριστικές και μεταθετικές.

1.5.1. Ομάδες

Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη (έστω "∘") έχει αντίστοιχη αλγεβρική δομή ανάλογα με τις ιδιότητες της πράξης. Έτσι, έχουμε κατ' αρχήν την έννοια της δομής ομάδας σ' ένα (μη κενό) σύνολο σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.4. Ένα ζεύγος (G, ∘) αποτελούμενο από ένα σύνολο G και μια πράξη

$$\circ : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x \circ y$$

καλείται *ομάδα*, αν η "$\circ$" ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

α) Είναι προσεταιριστική, δηλαδή

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

για κάθε $x, y, z \in G$

β) Υπάρχει στοιχείο e του G τέτοιο ώστε

$$x \circ e = x = e \circ x$$

για κάθε $x \in G$

γ) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $x' \in G$ έτσι ώστε

$$x \circ x' = e = x' \circ x$$ ❑

Παρατήρηση 1.5. Σχετικά με τον ορισμό μιας ομάδας (G, $\circ$), σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4, παρατηρούμε τα εξής:

α) Το σύνολο G είναι μη κενό, αφού $e \in G$ (πρβλ. ιδιότητα (β)).

β) Το e είναι το *μοναδικό* στοιχείο του G με την ιδιότητα (β) και καλείται *ουδέτερο στοιχείο* της ομάδας G

γ) Για κάθε $x \in G$ το x' που ορίζεται από την ιδιότητα (γ) είναι *μοναδικό* και καλείται *συμμετρικό* του στοιχείου x.

δ) Αν η πράξη "$\circ$" είναι μεταθετική, δηλαδή

$$x \circ y = y \circ x$$

για κάθε $x, y \in G$, η ομάδα (G, $\circ$) καλείται *αβελιανή* (ή *μεταθετική*).

Παράδειγμα 1.9.

α) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με πράξη την πρόσθεση (Π) είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0 (μηδέν) και συμμετρικό στοιχείο τον αντίθετο κάθε πραγματικού αριθμού (πρβλ. παράγραφο 1.3, (Π1)-(Π4)).

β) Το σύνολο $\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} - \{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών με πράξη τον πολλαπλασιασμό (Μ) είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 1 (μονάδα) και συμμετρικό στοιχείο τον αντίστροφο κάθε μη μηδενικού πραγματικού αριθμού (πρβλ. παράγραφο 1.3, (Μ1)-(Μ4)).

γ) Τα σύνολα $\mathbb{Z}$ των ακέραιων , $\mathbb{Q}$ των ρητών, $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αποτελούν αβελιανές ομάδες ως προς την αντίστοιχη πράξη της πρόσθεσης.

δ) Τα σύνολα $\mathbb{Q}^+$ των θετικών ρητών, $\mathbb{R}^+$ των θετικών πραγματικών, $\mathbb{Q}^+ \equiv \mathbb{Q} - \{0\}$ των μη μηδενικών ρητών, $\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$ των μη μηδενικών μιγαδικών αποτελούν αβελιανές ομάδες με πράξη τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα 1.10.

Θεωρούμε X ένα μη κενό σύνολο και $\mathrm{H(X)}$ το σύνολο όλων των 1-1 και επί απεικονίσεων του X επί του X. Στο σύνολο $\mathrm{H(X)}$ ορίζεται η πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων

$$\circ : \mathrm{H(X)} \times \mathrm{H(X)} \to \mathrm{H(X)} : (\mathrm{f}, \mathrm{g}) \mapsto \mathrm{g} \circ \mathrm{f}$$

(πρβλ. (1.23)). Τότε το $(\mathrm{H(X)}, \circ)$ είναι μια μη αβελιανή ομάδα.

Πράγματι, για δύο απεικονίσεις $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{H(X)}$ η $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \in \mathrm{H(X)}$ (πρβλ. Πρόταση 1.2), ενώ η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id_X} \in \mathrm{H(X)}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του $\mathrm{H(X)}$ (πρβλ. (1.21)) και για κάθε $\mathrm{f} \in \mathrm{H(X)}$ η αντίστροφη απεικόνιση $\mathrm{f}^{-1} \in \mathrm{H(X)}$ (πρβλ. Πρόταση 1.1). Τέλος, η πράξη "$\circ$" ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (γ) του Ορισμού 1.4 (πρβλ. σχετικά (1.24)), έτσι ώστε το $(\mathrm{H(X)}, \circ)$ είναι ομάδα, όχι όμως αβελιανή, αφού γενικά $\mathrm{f} \circ \mathrm{g} \neq \mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ (πρβλ. Παράδειγμα 1.8).

1.5.2. Δακτύλιοι

Χαρακτηριστική αλγεβρική δομή (μη κενού) συνόλου εφοδιασμένου με δύο (εσωτερικές) πράξεις είναι εκείνη του δακτυλίου, σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.5. Ένα σύνολο A εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την

$$\circ : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A} : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \mathrm{x} \circ \mathrm{y}$$

και την

$$* : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A} : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \mathrm{x} * \mathrm{y}$$

(συμβολικά $(\mathrm{A}, \circ, *)$) καλείται *δακτύλιος*, αν ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α) Το $(\mathrm{A}, \circ)$ είναι αβελιανή ομάδα
β) Η πράξη "$*$" είναι προσεταιριστική, δηλαδή

$$\mathrm{x} * (\mathrm{y} * \mathrm{z}) = (\mathrm{x} * \mathrm{y}) * \mathrm{z}$$

για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{A}$.

γ) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο 1 ως προς την πράξη "$*$", δηλαδή

$$x * 1 = x = 1 * x$$

για κάθε $x \in A$.

δ) Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της "$*$" ως προς την πράξη "$\circ$", δηλαδή

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z) \text{ και } (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$$

για κάθε $x, y, z \in A$. ❑

Ιδιαιτέρως, αν σ' ένα δακτύλιο $(A, \circ, *)$ η πράξη $*$ έχει και τη μεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $x * y = y * x$, για κάθε $x, y \in A$, τότε ο δακτύλιος καλείται *μεταθετικός*.

Παράδειγμα 1.11.

α) Το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης (Π) και του πολλαπλασιασμού (Μ) (συμβολικά $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος (πρβλ. (Π1)-(Π4), (Μ1)-(Μ3) και (Π-Μ) της παραγράφου 1.3).

β) Τα σύνολα $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ των ακέραιων $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ των ρητών και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ των μιγαδικών με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι μεταθετικοί δακτύλιοι.

Σημείωση 1.3. Σε ορισμένα συγγράμματα, αντί των γενικών πράξεων $\circ, *$ ενός δακτυλίου χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $+, \cdot$ αντίστοιχα, θεωρούμενα πρόσθεση και πολλαπλασιασμός σ' ένα σύνολο A κατ' επέκταση της σχετικής ορολογίας στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή σημειώνουμε συμβολικά $(A, +, \cdot)$.

1.5.3. Σώματα

Στον ορισμό ενός δακτυλίου $(A, \circ, *)$ παρατηρούμε ότι το $(A, \circ)$ είναι μεταθετική ομάδα, ενώ το $(A, *)$ δεν είναι ομάδα, αφού δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της ύπαρξης του συμμετρικού στοιχείου.

Για παράδειγμα, στο δακτύλιο $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχει πάντοτε $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$, αφού για το $x = 0$ δεν ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη. Ένα σύνολο $(A, \circ, *)$ που ικανοποιεί και την ιδιότητα αυτή έχει δομή σώματος, σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.6. Ένα σύνολο F εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\circ$, $*$ (συμβολικά $(F, \circ, *)$) καλείται *σώμα*, αν

α) Η τριάδα $(F, \circ, *)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος
β) Για $F^* \equiv F - \{e\}$ (e είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\circ$), το ζεύγος $(F^*, *)$ είναι ομάδα. ❑

Με άλλα λόγια

Σώμα είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος του οποίου όλα τα στοιχεία τα διάφορα του e έχουν συμμετρικό.

Παράδειγμα 1.12.

α) Το $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών, σύμφωνα με το Αξίωμα Ι της παραγράφου 1.2.
β) Τα σύνολα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ των ρητών αριθμών, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ των μιγαδικών αριθμών με τις αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι σώματα.
γ) Το σύνολο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ των ακέραιων αριθμών δεν είναι σώμα, γιατί τα μόνα στοιχεία που έχουν αντίστροφο ακέραιο αριθμό είναι το 1 και το -1.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι πολλές φορές υιοθετείται ο συμβολισμός $(F, +, \cdot)$, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της πρόσθεσης "+" και του πολλαπλασιασμού "·" των πραγματικών αριθμών, κατ' επέκταση της σχετικής ορολογίας (πρβλ. Σημείωση 1.3).

Ασκήσεις

1. Αν Α, Β, Γ είναι υποσύνολα ενός συνόλου Χ, να δειχθεί ότι:

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$ $\qquad$ $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$

$A \cup A^c = X$ $\qquad$ $A \cap A^c = \varnothing$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. Για τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ να δειχθεί ότι:

i) $A \times B = \varnothing$ τότε και μόνο τότε αν $A = \varnothing$ ή $B = \varnothing$

ii) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

iii) $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

iv) $(A - B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) - (B \times \Gamma)$

3. Για μια απεικόνιση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$, $\Gamma, \Delta \subseteq Y$ να δειχθεί ότι:

i) αν $A \subseteq B$, τότε $f(A) \subseteq f(B)$

ii) αν $\Gamma \subseteq \Delta$, τότε $f^{-1}(\Gamma) \subseteq f^{-1}(\Delta)$

iii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

iv) $f(f^{-1}(\Gamma)) \subseteq \Gamma$

4. Για μια απεικόνιση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$, $\Gamma, \Delta \subseteq Y$ να δειχθεί ότι:

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ii) $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$

iii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

iv) $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$

5. Για δύο απεικονίσεις $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ να δειχθεί ότι:

i) αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί

ii) αν η $g \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

6. Αν $(G, \circ)$ είναι ομάδα και $\alpha \in G$, να δειχθεί ότι οι σχέσεις $\alpha \circ x = \alpha \circ x'$ και $y \circ \alpha = y' \circ \alpha$, για $x, x', y, y' \in G$ συνεπάγονται $x = x'$, $y = y'$ αντίστοιχα.

7. Να δειχθεί ότι μια ομάδα $(G, \circ)$ με $x \circ x = e$, για κάθε $x \in G$, είναι μεταθετική.

8. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{p + q\sqrt{7} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι σώμα με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών.

9. Να υπολογιστούν οι μιγαδικοί αριθμοί:

i) $(3 + 2i) \cdot (2 - i)$

ii) $(6i - 2) \cdot (-3i + 1)$

iii) $\dfrac{1}{4 + i}$

iv) $\dfrac{3 + 4i}{2 - i}$

v) $\dfrac{5 - 6i}{7 + 8i}$

vi) $\dfrac{(7i - 6) \cdot (3 - 4i)}{2i + 1}$

vii) $(2i + 3) \cdot (3i - 4)$ viii) $(8i - 2) \cdot (8i + 2)$

10. Να υπολογιστούν οι συζυγείς, τα μέτρα και οι αντίστροφοι των μιγαδικών αριθμών:

$$-2 - i, \quad 3 + 4i, \quad 6 - 2i, \quad -i, \quad -i + 1, \quad 7i + 4, \quad 3i - 2$$

11. Να αποδειχθούν πλήρως οι ισχυρισμοί του Παραδείγματος 1.12 (β).

12. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών (1)-(12).